R による計量分析：データ解析と可視化

回帰分析への導入

伊藤 岳

富山大学 経済学部 2017 年度後期

Email: gito@eco.u-toyama.ac.jp

December 18, 2017

Agenda

1. 中間課題 (1) の講評
2. 統計的仮説検定の解釈と統計的過誤 (復習)
3. 線形回帰分析
4. 線形回帰分析：R コード

中間課題 (1)

R スクリプトで実行する内容

1. 連続一様分布 $X \sim \mathcal{U}(-10, 10)$ から，大きさ (標本サイズ) $n = 1,000$ の標本を抽出
   - 期待値 (母平均) は，$(-10 + 10)/2 = 0$
2. 1 回毎に，標本平均と 99%信頼区間を計算して記録する
3. 以上の作業を $m = 10,000$ 回繰り返す
4. m 回の結果をまとめて，99%信頼区間をプロットする
   - ただし，図にする際は見やすいよう，$1,000$ の標本の結果をランダムに抽出する

- 90%信頼区間：$[\overline{X}_n - 1.65\mathrm{SE}, \overline{X}_n + 1.65\mathrm{SE}]$
- 95%信頼区間：$[\overline{X}_n - 1.96\mathrm{SE}, \overline{X}_n + 1.96\mathrm{SE}]$
- 99%信頼区間：$[\overline{X}_n - 2.56\mathrm{SE}, \overline{X}_n + 2.56\mathrm{SE}]$
- 95%信頼区間のシミュレーションをしているテンプレートでは「1.96」を使っているので，どこかを変えればよい
  - α が有意水準のとき，$100 \times (1 - \alpha)$ が信頼係数

中間課題 (1)

概要

- 提出者：4 名 (11630806, 11630005, 11430078, 11630043)
- 配点：20 (/100. シラバス通り)
- 注意：(1) 学籍番号の誤植, (2) メールの本文 (減点対象)

確認したかった理解とスキル

- R スクリプトの作成と実行
  - 任意のディレクトリに処理結果 (今回は図) を出力する
  - 一般的なスクリプトの一部を変更することで, 異なる処理を行なう
- 信頼区間の理解と解釈
  - 信頼区間の意味
  - 信頼係数と有意水準

帰無仮説，対立仮説と仮説検定の解釈

検定結果の解釈と注意

- 「(有意水準 α で) 統計的に有意 (statistically significant)」:「H_0 を棄却した」(H_0 が正しいとすると，起こり得ないような稀な現象が起きた)
- 帰無仮説 H_0 が棄却されれば，対立仮説 H_1 の正当性を強く主張できる
- 帰無仮説 H_0 が棄却されなかったからといって，H_0 が真とは限らない

例：母平均の検定

- 帰無仮説 H_0 を「$\mu = \mu_0 = 1$」，対立仮説 H_1 を「$\mu \neq 1$」とした t 検定の結果，H_0 を棄却できなかった
- しかし，μ は $\mu_0 = 1$ かもしれないが，1.1 や 0.9 かもしれない (無数の可能性が残る)
- $\mu_0 = 1$ を棄却できなかったからといって,「どの帰無仮説 (1, 1.1, 0.9, etc.) が正しいか」は分からない (H_0「$\mu = \mu_0 = 1$」が真とは限らない)

帰無仮説，対立仮説と仮説検定の解釈

例：有罪か無罪か (副読本・浅野矢内本，第 7 章)

- 帰無仮説 H_0：「容疑者 X はこの事件の犯人ではない (無罪である)」
- 対立仮説 H_1：「容疑者 X はこの事件の犯人である (無罪ではない)」
- H_0 が棄却できなかった場合にも，「X が完全犯罪を達成し，(推定) 無罪を勝ち取った」可能性は残る
- H_0 が棄却できれば，より強い結論を得られる
  - ただし，「H_0 が正しく，かつ非常に稀な現象が起きた」可能性は残る (その確率は有意水準 α)
  - 確率 α で偽陽性 (この例でいえば「冤罪」) が生じ得るから
  - 有意水準 α は，偽陽性と偽陰性のバランスを決める (統計的過誤へ)

統計的過誤

2 つの統計的過誤

- 第一種過誤 (Type I/α error; 偽陽性 false positive)：帰無仮説 H_0 が正しいにもかかわらず，H_0 を棄却してしまう誤り
- 第二種過誤 (Type II/β error; 偽陰性 false negative)：帰無仮説 H_0 が正しくないにもかかわらず，H_0 を棄却できない誤り

- 有意水準 α を厳しく (小さく) すれば，偽陽性 (誤検出) を減らせるが，偽陰性 (検出失敗) を増やしてしまう

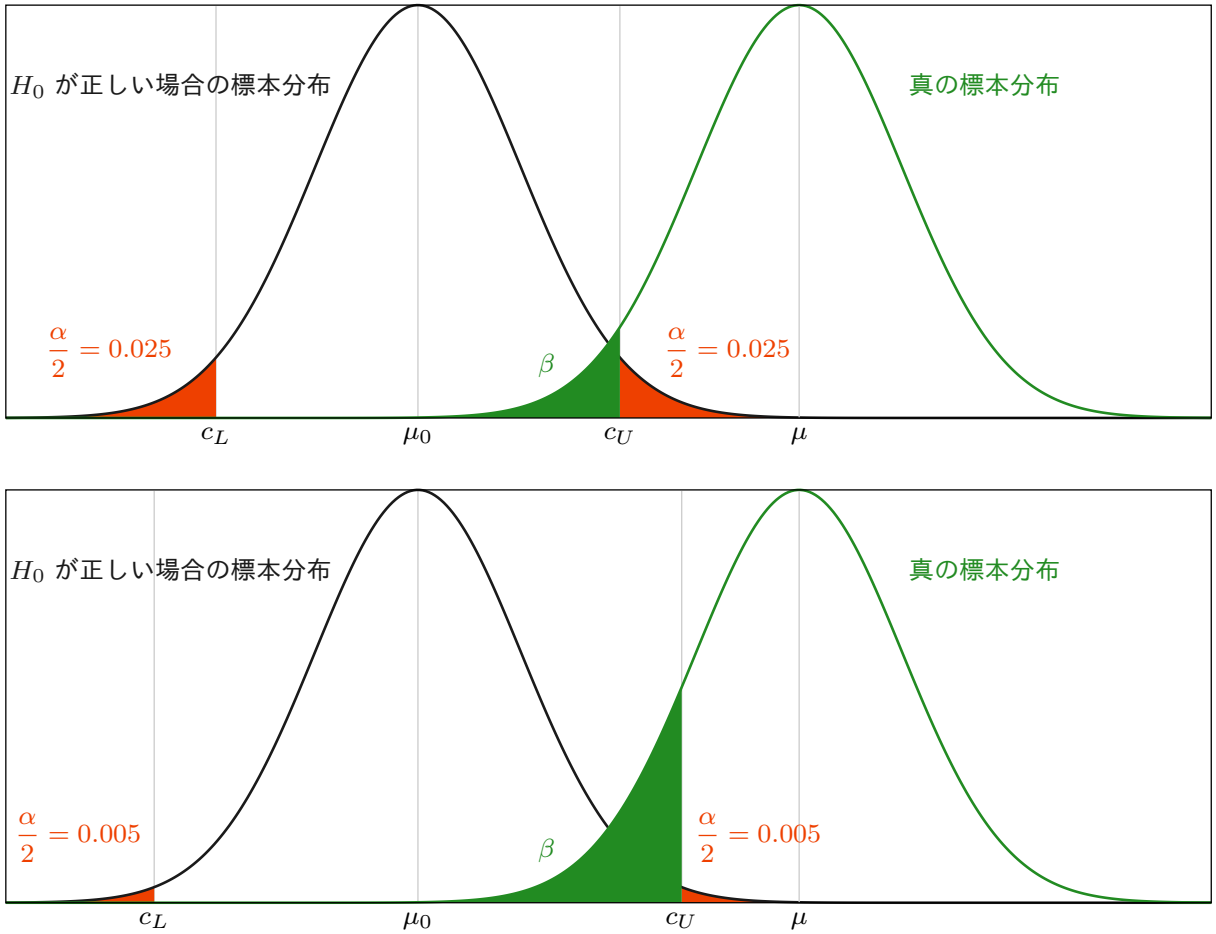
  例 有意水準 α を厳しくすれば，冤罪を減らせるが，完全犯罪を増やしてしまう
- 有意水準 α は「偽陽性の確率」，あるいは偽陽性と偽陰性のバランスの (ある学術分野における) 「相場」「伝統的に使う目安」に依存する
  - 社会科学なら多くの場合 $\alpha = 0.05$ (5%水準)
  - 他によく使われる水準：10%, 1%, 0.1%水準

統計的過誤

	真実	
仮説検定の結果	H_0 が正しい	H_1 が正しい
H_0 を棄却	第一種過誤 確率: 有意水準 α	正しい検定結果 確率: 検出力 $1-\beta$
H_0 を受容	正しい検定結果 確率: $1-\alpha$	第二種過誤 確率: β

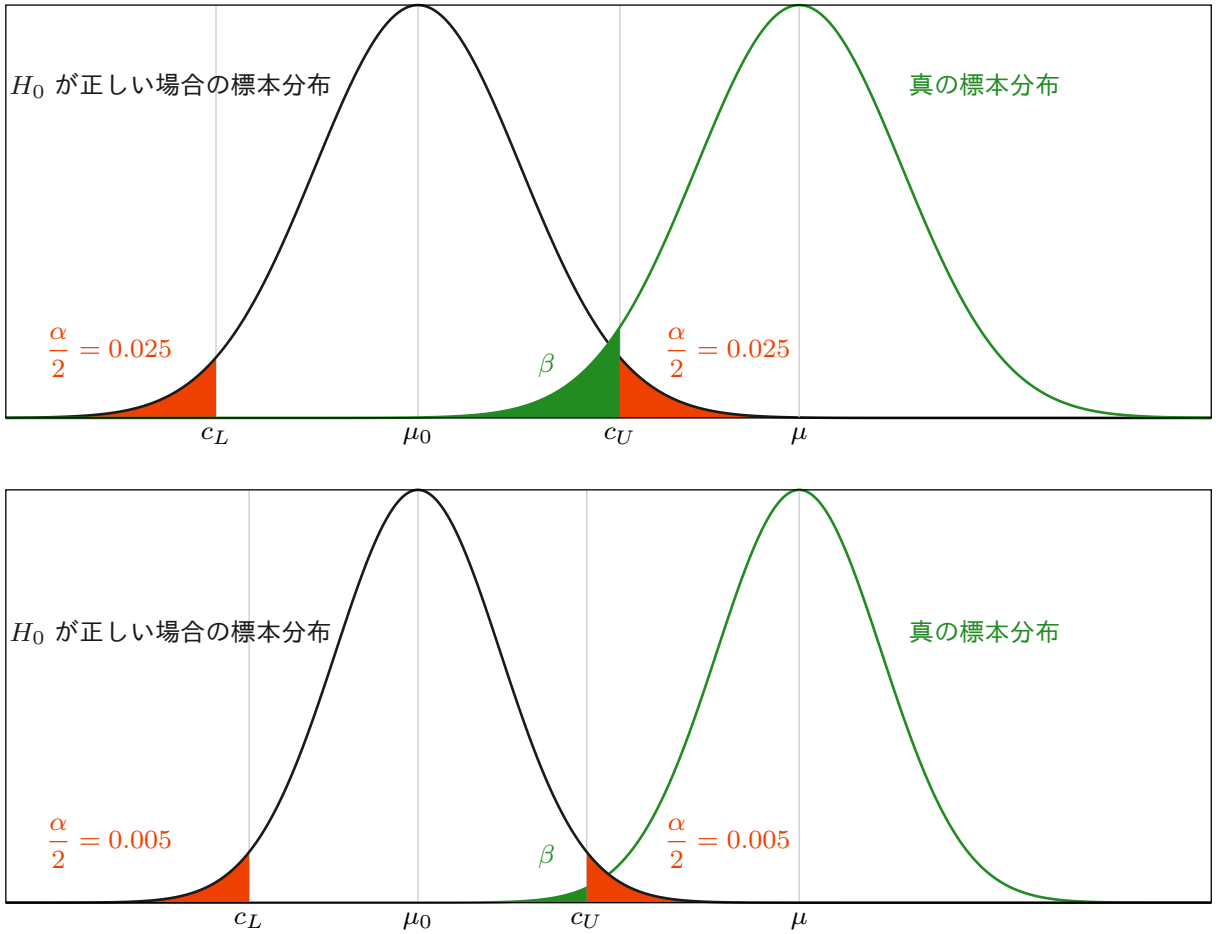
- 第一種過誤の確率は，有意水準 α に一致する
- 第二種過誤の確率 β は，(1) α の大きさと (2) 帰無仮説 μ_0 が真実 (μ) からどれ位離れているかに依存する
  - μ を知らないので，標本から β を計算することはできない
  - (1) を変更するか，(2) を代替的な方法で変更して，β を縮減することはできる
  - 我々は μ を知らないので，μ_0 を直接変更することは無意味 (できない)
- $1-\beta$ を，検定のパワー／検出力 (power) と呼ぶ：H_1 が正しいときに第二種過誤を犯さない確率

第二種過誤と有意水準 α



- 有意水準 α は「厳しければよい」訳ではない：第一種過誤の確率 α は小さくなるが，第二種過誤の確率 β は大きくなる
- 両者はトレード・オフの関係にある

第二種過誤と標本サイズ



- 我々は μ を知らないので，μ_0 を直接変更することは無意味 (できない)
- なら，標本サイズ n を大きくして分散を小さくすればよい
- α が一定でも，n が大きくなれば β は小さくなる (検出力は大きくなる)

第二種過誤と標本サイズ

t 検定の R コードを思い出す

- 母平均 $\mu = 0$ としたシミュレーションで,
  - $n = 1,000$ のときには，H_0「$\mu = \mu_0 = 0.1$」を 5%水準で棄却できた
  - $n = 100$ のときには，H_0「$\mu = \mu_0 = 0.1$」を 5%水準で棄却できなかった
- n が小さいときには第二種過誤 (偽陰性) が生じていた
- n を 100 から $1,000$ に増やしたことで，α を一定 $(\alpha = 0.05)$ にしつつ β を小さくできた

統計的過誤：まとめ

- 第一種過誤は偽陽性，第二種過誤は偽陰性
- 第一種過誤の確率は有意水準 α に等しく，分析者が設定できる
  - 分野の「お作法」や「慣習」がある (例: 社会科学での $\alpha = 0.05$)
  - α は検定を始める前に決めておく (結果を見てから都合よく変えてはいけない)
- 第二種過誤の確率 β は標本から計算できないが，(1) α と (2) 帰無仮説 H_0 が主張する μ_0 と真実 (μ) の距離に依存する
- (1) 有意水準 α を適切に設定し，(2) 標本サイズ n を大きくすることで，過誤の可能性を小さくできる
  - H_0 が「真実とかけ離れたこと」を主張していれば β は小さいが，我々は真実を知らないので，H_0 を直接調整することはできない
- $1 - \beta$ を検出力という
  - α が小さいとき，(β が大きくなるので) 検出力は小さくなる
  - n が大きいとき，(β が小さくなるので) 検出力は大きくなる

回帰分析

- 相関関係を考える際には，2 つの変数の間に区別はなかった
- 回帰分析では，一方の変数が他方の変数を説明するという因果関係を想定する (仮定する)
- 回帰 (regression)：「興味のある (従属) 変数 y の値・振る舞いを，他の (独立) 変数 x を用いて予測すること」
- 線形回帰：従属変数の平均値の変化を，独立変数の線形関数で要約する方法
  - 一般化線形モデル (generalized linear model, GLM)
- 単回帰分析：1 つの独立変数を含む回帰分析
- 重回帰分析：複数の独立変数を含む回帰分析

従属変数と独立変数

- 従属変数 (dependent variable) y: 説明される変数 (結果)
  - 応答変数，被説明変数，結果変数
- 独立変数 (independent variable) x: 説明する変数 (原因)
  - 説明変数，予測変数
- コントロール (調整／統制) 変数
  - 注目する独立変数以外で，結果に影響を与える変数
  - 統計学的／数学的には単に x
- 従属変数と独立変数は，分析者が (なんらかの理論的根拠に基づき) 想定・仮定する
  - 「賃金 (従属変数 y) を教育年数 (独立変数 x) に回帰する」
  - 回帰分析のみによって，因果関係を示すことができる訳ではない

回帰式と誤差項

$$
\begin{aligned}
y_i &= \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{\beta} + \epsilon_i \\
&= \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_k x_{ik} + \epsilon_i, \quad \text{for } i = 1, \ldots, n,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

- 回帰係数 β_k: 独立変数と従属変数の関係を示す
  - 第一種過誤・第二種過誤の β と混同しないように
- 誤差項 (error term): $\epsilon_i = y_i - \hat{y}_i$
- 従属変数の変化は，独立変数の変化によって完全に説明できる訳ではない
- 観察不可能な (モデルに取り込まれていない)「偶然」のような変数の影響も受ける

回帰分析の記法

線形回帰モデルの数式表現

- 線形回帰モデルは，次のように表現できる

$$\begin{aligned} y_i &= \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\beta} + \epsilon_i \\ &= \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_k x_{ik} + \epsilon_i, \quad \text{for } i = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{2}$$

- また，次のようにも表現できる

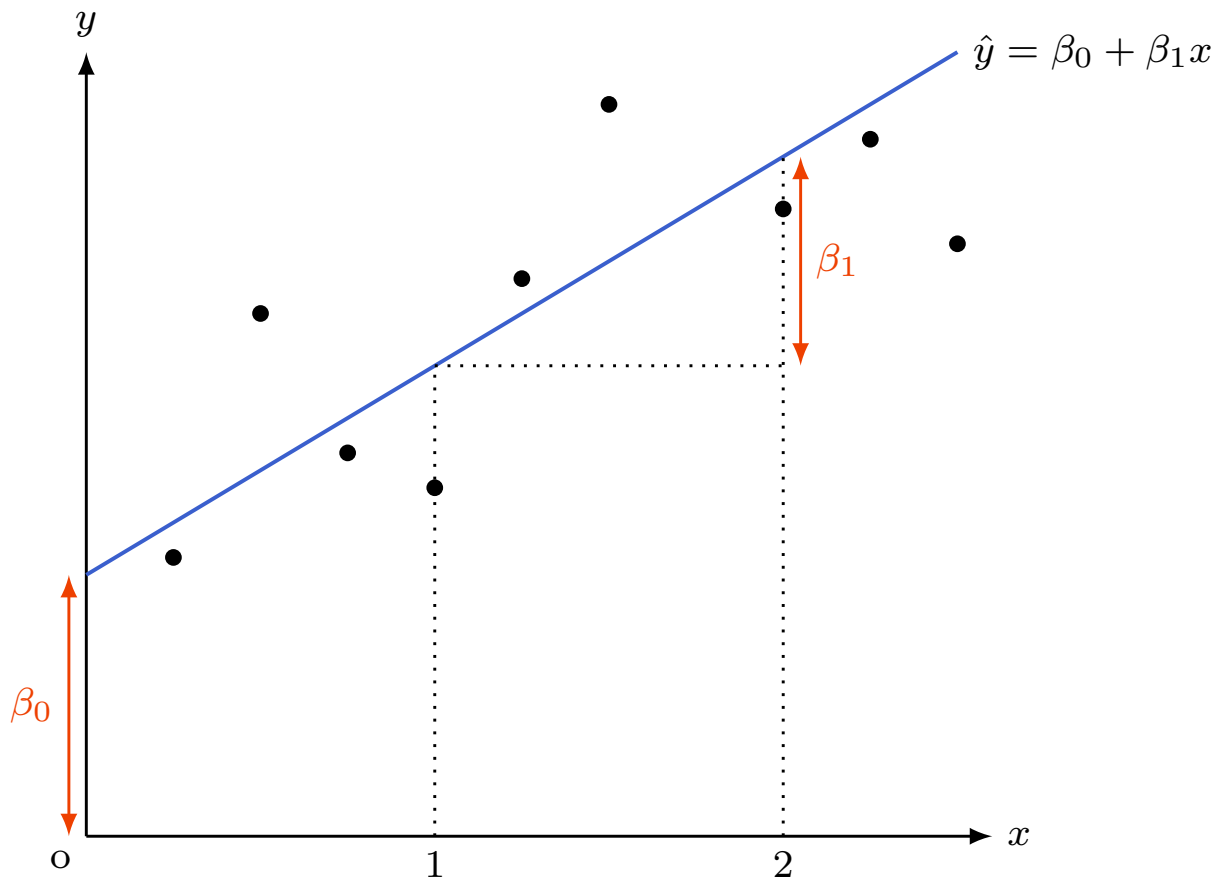
$$y_i \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\beta}, \sigma^2), \quad \text{for } i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

- あるいは，

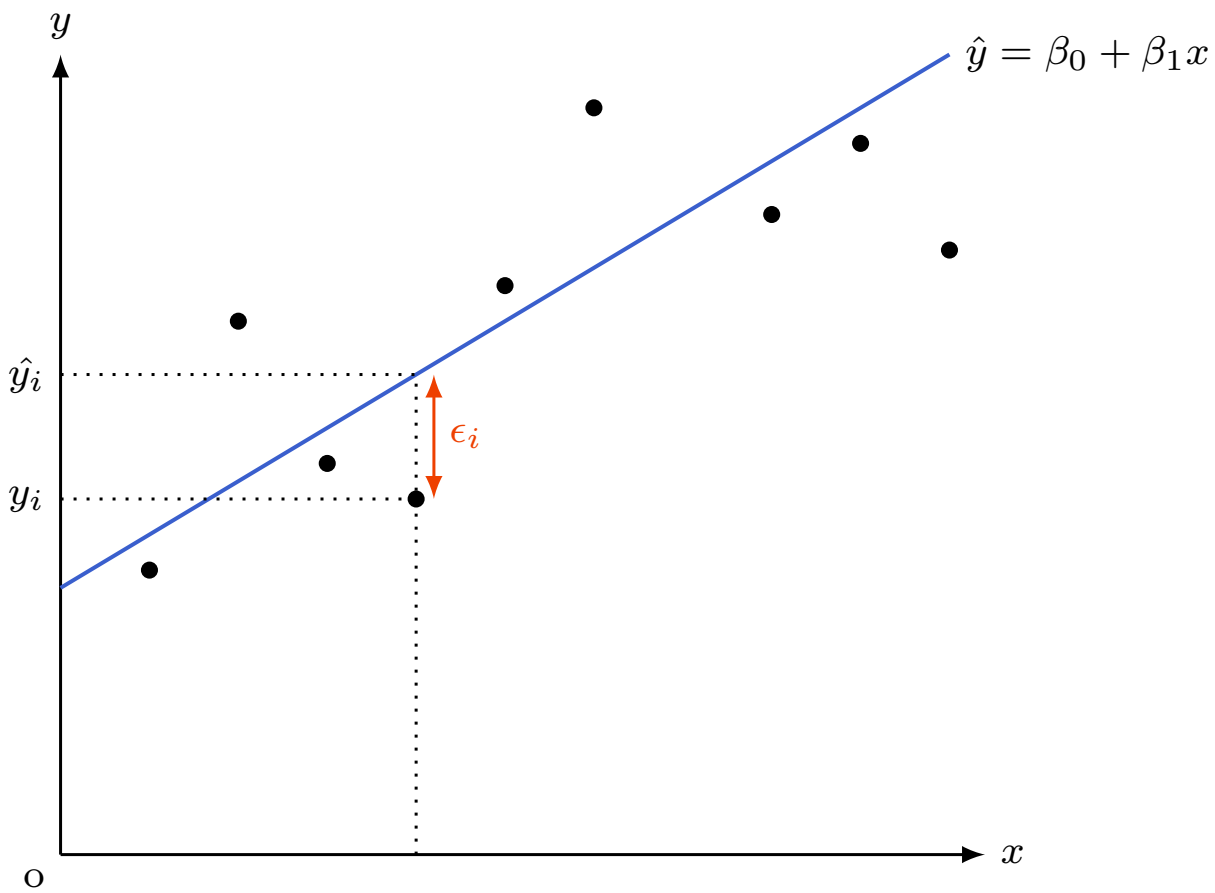
$$\boldsymbol{y} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{x}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\boldsymbol{I}), \tag{4}$$

where $\boldsymbol{I}$ is an $n \times n$ identity matrix (単位行列).

回帰分析の記法



回帰分析の記法



推定値と推定法

- 推定量 (estimator): 推定の結果を，標本 $\{(y_i, x_i) : i = 1, \ldots, n\}$ の関数として表現したもの
  - OLS 推定量 $\hat{\beta}_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2}$ (次スライド)
- 推定値 (estimate): (推定量に) 実際に標本を代入して計算した数値のこと

最小二乗法

- どのようにして (上の図の) 直線を引けば (回帰直線を推定すれば) よい？
- 最小二乗法 (ordinary least squares, OLS): 予測誤差 (残差 residual) の平方和 (二乗の和) を最小化することで，事で，観測値と予測値のズレを最小化する方法
- 予測誤差は観測値 (点) と予測値 (直線) のズレなので，そのズレが最も小さくなる回帰直線を見つける
- 平均二乗誤差 (mean squared error, MSE):

$$\mathrm{MSE} = \frac{1}{n}(\epsilon_1^2, \ldots, \epsilon_n^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$$

最小二乗法

- 回帰式 $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$ を考える
- 予測誤差 ϵ_i について,

$$\frac{1}{n}\epsilon_i^2 = \frac{1}{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{1}{n}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2 \tag{5}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2 \tag{6}$$

- これを最小化する回帰係数の値を，最小二乗推定量 (OLS 推定量) と呼ぶ
- MSE を最小化するには，回帰係数で偏微分して「$= 0$」と置いた連立方程式を解けばよい (最適化の 1 階条件)

$$\frac{\partial \mathrm{MSE}}{\partial \hat{\beta}_0} = -\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial \mathrm{MSE}}{\partial \hat{\beta}_1} = -\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0 \tag{8}$$

- この連立方程式を解けば，OLS 推定量が得られる

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2} \tag{9}$$

最小二乗法

- 行列を使えば，OLS 推定量は $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x})^{-1} \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y}$ と書ける
- OLS 推定量と相関係数
  - $\hat{\beta}_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2}$
  - $r_{xy} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_n)(y_i - \overline{y}_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_n)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y}_n)^2}}$
- 違いは分母：独立変数の分散 (回帰係数) か両者の標準偏差 (相関係数) か
  - 「回帰分析のみで実証できること」は因果関係ではない (とは限らない)
- 回帰係数にせよ相関係数にせよ，2 つの変数の「変化 (variation) の関係」を見るもの
- 「変化の関係」をみるのだから，両者に十分な変化がなければならない！
  - 副読本森田本の例：市区町村の失業者数が，1 つだけ 500 でそれ以外は 1,000 の場合？

回帰係数の検定 (詳しくは次回)

- $\frac{\beta_k - \hat{\beta}_k}{\mathrm{SE}}$ は自由度 $n-k$ の t 分布に従う
  - n は標本サイズ，k は切片 β_0 を含む回帰係数の数
- 自由度 $n-k$ の t 分布を使った t 検定を行なう
  - 帰無仮説 H_0：$\beta_k = 0$
- 前回扱った平均値の検定と同様に，仮説検定ができる
- 有意水準 $\alpha = 0.05$ なら，$\pm 1.96\mathrm{SE}$ が目安になる
- (H_0 は $\beta_k = 0$ なので，) おおよそ $\hat{\beta}_k \pm 1.96\mathrm{SE}$ (あるいは約 $2\mathrm{SE}$) の範囲に “0” が含まれなければ，その回帰係数の効果は統計的に有意 (statistically significant)
- $\hat{\beta}_k$ の 95%信頼区間：$[\hat{\beta}_k - t_{0.025,n-k}\mathrm{SE}, \hat{\beta}_k + t_{0.025,n-k}\mathrm{SE}]$

回帰係数と限界効果

線形回帰における (偏) 回帰係数の解釈

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \epsilon \tag{10}$$

という回帰式を考える

- この回帰式において，独立変数 x_k の偏回帰係数 β_k は，他の独立変数の値を一定に保ったとき，x_k が 1 (単位) 増加したときの従属変数 (の予測値) $\hat{y}$ の増加量
- 重回帰分析における「偏回帰係数」の「偏」は偏微分の「偏 (partial)」と同じ意味
- 「x_k が 1 (単位) 増加したときの従属変数 (の予測値) $\hat{y}$ の増加量 (影響の大きさ)」のことを，限界効果 (marginal effect) という
  - 回帰係数と同じに思えるが，より高度な一般化線形モデル (本講義では扱わない) の理解や，後述の交互作用項を含むモデルの理解には限界効果が非常に重要

回帰係数と限界効果

線形回帰における (偏) 回帰係数の解釈

- 解析では，統計的有意性 (statistical significance) と同程度以上に，実質的有意性 (substantial significance; 効果の大小) が重要
- 実質的有意性を解釈する上では，限界効果が鍵になる
  - 一般化線形モデル (identity link 以外) では線形回帰のような直感的な解釈が困難なため，限界効果の計算・作図がより重要になる

限界効果

- 「偏」の字から直感的にわかる通り，x_k の限界効果は (10) 式を x_k で偏微分すれば求められる.

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial x_k} = \beta_k \tag{11}$$

回帰係数と限界効果

限界効果，実質的有意性の重要さ

- よく聞く表現：「この変数はトウケイテキニユーイだった．大事だ」
- 気をつけるべき点：統計的に有意だからといって，実質的に有意とは限らない (「統計的に有意でも，大して影響のない」変数もある)

「他の独立変数が一定のとき」の意味をよく考える

- 常に「一定に保つ」ことができる訳ではない
  - 例：二乗項や交互作用項／交差項 (interaction term) が含まれる回帰式 (次スライド)
  - 交互作用 (interaction)：ある独立変数の効果が，他の独立変数の値によって異なること
- いずれの場合でも，ある独立変数 x_k「だけ」を動かして，その限界効果を提示することは不可能 (掛け算してるから！)
- さらに，観察データ (observational data) では，往々にして独立変数間に相関がある (Hanmer & Ozan Kalkan, 2013)

限界効果の計算：Interaction term がある場合

交互作用項とは

- $x_1 \times x_2$ のような,「かけ算」で表現される (独立) 変数
- $x_1 \times x_2$ を “product term,” x_1 と x_2 を “constitutive term(s)” (main effect) と呼ぶ
  - 理論的議論：Berry et al. (2010, 2012); Brambor et al. (2006); Clark et al. (2006); Kam & Franzese (2007); Rainey (2015)

交互作用項の解釈と限界効果

- よくある間違い (1)：x_1 (e.g., 投薬の有無) や x_2 (e.g., 性別) の交互作用項 $x_1 \times x_2$ を回帰式に投入したから，x_1 と x_2 をバラバラに回帰式に投入する必要はない！
  - 誤：$y = \beta_0 + \beta_3 x_1 x_2 + \epsilon$
  - 正：$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2 + \epsilon$
- よくある間違い (2)：交互作用項の回帰係数 β_3 が有意だった！ だから，x_1 や x_2 単独ではなく，その組み合わせが重要なんだ！ (もうちょっと作業が必要)

限界効果の計算：Interaction term がある場合

- 交互作用項がある場合，product term も constitutive term も，単一の回帰係数のみでは解釈できない
- たとえば，$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2 + \epsilon$ の回帰式を考える
- x_1 の限界効果を計算するには回帰式を x_1 で偏微分すればよいので，

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \beta_1 + \beta_3 x_2 \tag{12}$$

- すなわち，x_1 の限界効果は β_1 ではなく，$\beta_1 + \beta_3 x_2$
- x_2 の限界効果も同様に求められる

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = \beta_2 + \beta_3 x_1 \tag{13}$$

- x_2 の限界効果は β_2 ではなく，$\beta_2 + \beta_3 x_1$
- $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2 + \epsilon$ のような，二乗項 (“2” である必要はない．3 以上でもよい) を含む回帰式についても同様

限界効果の計算：Interaction term がある場合

含意

(1) x_1 と x_2 の「掛け算」が入るのだから，x_1 を「だけ」を変化させ，「他の変数を一定に」することはできない

(2) $x_2 = 0$ (かつ／あるいは $\beta_3 = 0$) でない限り，x_1 の限界効果は x_2 の水準に依存する

(2') x_2 の水準を固定しなければ x_1 の限界効果を計算できないが，x_2 の水準によって x_1 の限界効果が変化する

- 実際問題，「様々な x_2 の水準における x_1 の限界効果を示す図」がなければ解釈できない！
- 典型的には，x_2 を x 軸に，x_2 がある値のときの x_1 の限界効果を y 軸にとったグラフを使う

(3) 一般化線形モデル (identity link 以外) の場合，“compression effect” が生じるため，さらに大変 (「他の全ての独立変数」の値に依存する; Berry et al., 2010; Rainey, 2015)

R による回帰分析とシミュレーション

現実のデータを用いた解析

- カナダのセンサスデータ (1971) `Prestige`
- `car` パッケージから読み込めるサンプルデータ

シミュレーション

- 疑問：モデルを正しく特定できている (かつ種々の仮定も満たされている) として，回帰分析は「真の」影響の大きさとその不確実性を，本当に教えてくれるのだろうか
- 検討：「真のモデル」が分かる仮想データを大量につくり，解析
- 手順：「真のモデル (データ生成プロセス data generating process) は同じだが，微妙に異なる」$n = 1,000$ の仮想データを $3,000$ 個つくり，$3,000$ 回の回帰分析を回し，その結果を俯瞰する
- 問題：「ポチポチ」してたら日が暮れる (どころじゃ済まない．3,000 どころか 3,000,000 回かもしれない)

R による回帰分析とシミュレーション

R による実行

- サンプルデータ `Prestige` の回帰分析
- シミュレーションによる回帰分析の理解
  - 3,000 回だろうが 3,000,000 回だろうが一箇所変えるだけ
- R コード: `http://cfes-project.eco.u-toyama.ac.jp/wp-content/uploads/5_regression_fall2017.html`
  - 「演習資料」ページの「5. データの解析」にある「回帰分析のシミュレーション」

次回講義と課題

- 次回講義
  - 今日の続き (回帰分析)
  - データの自動取得 (API, ウェブスクレイピング)
- 文献と課題

必須 星野・田中『R による実証分析』第 4–6 章 (教科書)
推奨 Gelman & Hill. *Data analysis*. Chaps. 3–4 (教科書)
推奨 浅野・矢内『Stata による計量政治学』第 7–12 章 (副読本)
推奨 石田ほか『R によるスクレイピング入門』(副読本)
推奨 森田『実証分析入門』第 4–8 章 (副読本)
課題 (1) 講義資料「R 言語の基礎，オブジェクトとその要素へのアクセス」と「R によるデータの読み込みと書き出し」を RStudio で練習しておくこと．(2) シミュレーションを再度行なってみること

補足・再掲：R スクリプト作成と実行

RStudio で次の作業をする

1. RStudio を開き，command + shift + N (m)/control + shift + N (w) して，新しい R スクリプトを開く (作成する)
2. command + S (m)/control + S (w) して，(真っ白な) R スクリプトを分かりやすい場所に保存
   - ファイル名は半角文字のみにすること！
   - 例：clt_simulation.R
3. 演習の際は，ブラウザで開いているテンプレートの中身を，今作成した R スクリプトにコピペする．自分で全く新しいスクリプトを作る際は，R の関数や処理を上から (実行したい順番に) 書いていく
4. command + S (m)/control + S (w) して，R スクリプトを (上書き) 保存
5. 実行したい部分を選択し，command + enter (m)/control + enter (w) で実行
6. (エラーが出れば，コードに間違いがないか確認する)

補足：両側検定と片側検定

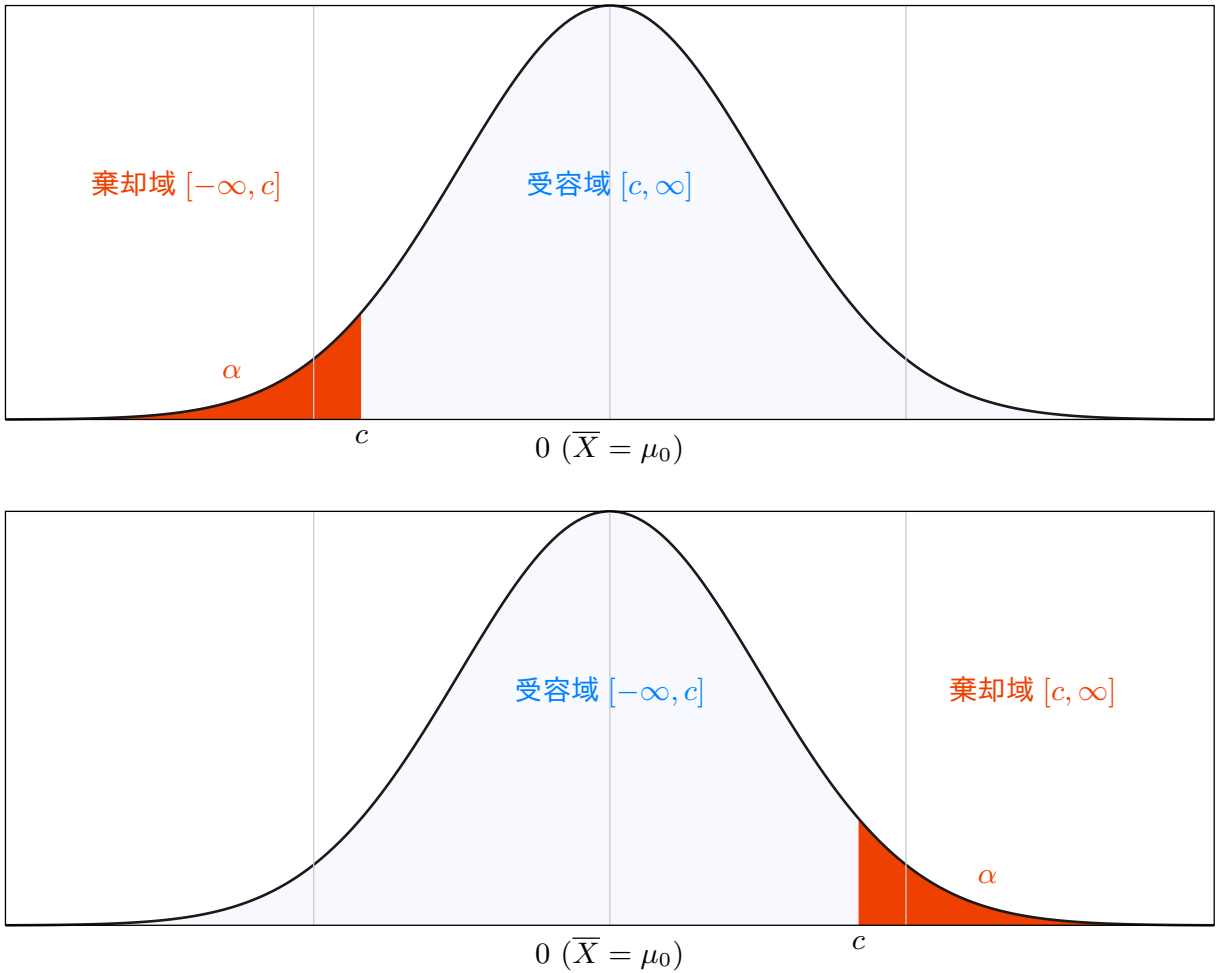
両側検定と片側検定

- 両側検定 (two-sided/-tailed test)：分布の両側に棄却域を設定する検定
- 片側検定 (one-sided/-tailed test)：分布の片側に棄却域を設定する検定

対立仮説の性質

- 帰無仮説 H_0 が「$\mu = \mu_0$」のとき，対立仮説 H_1 には 3 つのバリエーションがあり得る
  1. H_{1a}「$\mu \neq \mu_0$」
  2. H_{1b}「$\mu < \mu_0$」
  3. H_{1c}「$\mu > \mu_0$」
- 対立仮説の性質に応じ，両側検定 (H_{1a}) か片側検定 (H_{1b}, H_{1c}) かが決まる
- 「$\mu < \mu_0$」(H_{1b}) や「$\mu > \mu_0$」(H_{1c}) を設定する特段の理由がなければ，H_{1a} と両側検定を用いる (一般に，片側検定の方が H_0 を棄却しやすい)
- 副読本・浅野矢内本 pp.132–134 を参照のこと

補足：両側検定と片側検定



- H_{1b}「$\mu < \mu_0$」(上図) と H_{1c}「$\mu > \mu_0$」(下図) を想定した片側検定の棄却域と受容域

Berry, William D; Jacqueline H R DeMeritt & Justin Esarey (2010) Testing for Interaction Effects in Binary Logit and Probit Models: Is an Interaction Term Essential? *American Journal of Political Science* 54(1): 248–266.

Berry, William D; Matt Golder & Daniel Milton (2012) Improving Tests of Theories Positing Interaction. *Journal of Politics* 74(3): 653–671.

Brambor, Thomas; William Clark & Matt Golder (2006) Understanding interaction models: Improving empirical analyses. *Political Analysis* 14(1): 63–82.

Clark, William R; Michael J Gilligan & Matt Golder (2006) A simple multivariate test for asymmetric hypotheses. *Political Analysis* 14(3): 311–331.

Hanmer, Michael J & Kerem Ozan Kalkan (2013) Behind the Curve: Clarifying the Best Approach to Calculating Predicted Probabilities and Marginal Effects from Limited Dependent Variable Models. *American Journal of Political Science* 57(1): 263–277.

Kam, Cindy D & Robert J Franzese (2007) *Modeling and Interpreting Interactive Hypotheses in Regression Analysis: A Refresher and Some Practical Advice*. Ann Arbor, MI: University of Michigan Press.

Rainey, Carlisle (2015) Compression and Conditional Effects: A Product Term Is Essential When Using Logistic Regression to Test for Interaction. *Political Science Research and Methods forth*.